



# rozhledy

## MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

*nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu*

ROČNÍK 51, 1972-73

Vydává

ministerstvo školství

ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze

za odborné péče

Jednoty československých matematiků a fyziků

1. Váhy centesimální jsou zařízeny obdobně; rameno vahadla, nesoucí misku, je však 100-krát delší než rameno, jež nese můstek. Podmínka rovnováhy zní zřejmě  $F = \frac{G}{100}$ . Odvoďte ji!

2. V soutěži tvořivosti mládeže se pokuste zhotovit pro fyzikální sbírky školy model decimálních vah!

3. Kolika kladkami musíte opatřit kladkostroj obecný, aby podmínka rovnováhy zněla stejně jako u decimálních vah? Proveďte také pokusně!

## Doba výtoku kapaliny

JAN MANDEL, G Náchod

V posledním tématu FO „Hydrodynamika“ (Rozhledy, č. 2, 1970 až 71) byl odvozen vzorec pro okamžitou rychlost snižování hladiny při výtoku ideální kapaliny z nádoby

$$v = \frac{S_2 \sqrt{2}}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}} \sqrt{\frac{p' - p}{\rho}} + g y, \quad (1)$$

kde  $v$  je okamžitá rychlost snižování hladiny,  
 $S_1$  velikost plochy podstavy nádoby (rovná se libovolnému vodorovnému průřezu),  
 $S_2$  velikost plochy otvoru, kterým kapalina vytéká,  
 $p'$  tlak, působící na hladinu kapaliny v nádobě,  
 $p$  tlak, působící na vytékající kapalinu,  
 $\rho$  hustota kapaliny,  
 $y$  okamžitá výška hladiny,  
 $g$  tíhové zrychlení.

Veličiny  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $p'$ ,  $p$ ,  $\rho$ ,  $g$  pokládáme za konstantní.

Autor uvádí v dalším textu výpočet doby výtoku kapaliny, při čemž uvažuje zjednodušující předpoklad  $p' = p$ . Chceme-li však odvodit obecnější vzorec pro dobu výtoku bez tohoto zjednodušení, možno postupovat následujícím způsobem

Vztah (1) můžeme upravit na tvar

$$v = f(y) = A \sqrt{g y + B}, \quad (2)$$

kde  $A = \frac{S_2 \sqrt{2}}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}}$  a  $B = \frac{p' - p}{\rho}$  jsou konstanty.

Nyní hledíme funkci

$$t = g(y), \quad (3)$$

kde  $t$  je čas, měřený od počátku výtoku kapaliny.  
 Derivace této funkce

$$g'(y) = \frac{dt}{dy}. \quad (4)$$

Zároveň však platí

$$-\frac{dy}{dt} = v. \quad (5)$$

Z toho sloučením (2), (4), (5)

$$g'(y) = -\frac{1}{f(y)}, \quad (6)$$

takže podle definice neurčitého integrálu

$$g(y) = -\int \frac{dy}{f(y)}, \quad (7)$$

Po dosazení za  $f(y)$  z (2) integrujeme podle vzorce

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax + b}} = \frac{2\sqrt{ax + b}}{a} + C, \quad (8)$$

takže

$$g(y) = -\frac{2\sqrt{gy + B}}{A g} + C. \quad (9)$$

Konstantu  $C$  určíme z rovnice

$$g(h) = 0, \quad (10)$$

kde  $h$  je výška hladiny na počátku výtoku, tedy v čase  $t = 0$ .  
 Řešením (10) dostáváme

$$C = \frac{2\sqrt{gh + B}}{A g}. \quad (11)$$

Po dosazení do (9) a úpravě

$$g(y) = \frac{2}{A g} (\sqrt{gh + B} - \sqrt{gy + B}). \quad (12)$$

Dosazením za  $y = 0$  dostaneme dobu výtoku kapaliny

$$t_0 = g(0) = \frac{2}{Ag} (\sqrt{gh + B} - \sqrt{B}) . \quad (13)$$

Po dosazení za  $A, B$  z (2)

$$t_0 = \frac{\sqrt{2(S_1^2 - S_2^2)}}{S_2 g} \left( \sqrt{gh + \frac{p' - p}{\rho}} - \sqrt{\frac{p' - p}{\rho}} \right) . \quad (14)$$

Ve zvláštním případě, kdy  $p' = p$ , tedy když na hladinu nepůsobí přetlak, dojdeme ke stejnému výsledku, jako ve zmíněném článku.

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h \left[ \left( \frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right]}{g}} . \quad (15)$$

Pro výtok skutečné kapaliny je nutno upravit vzorec (14) tak, že místo  $S_2$  dosadíme  $\alpha S_2$ , kde  $\alpha$  je součinitel zúžení otvoru  $S_2$  a celkovou dobu výtoku násobíme koeficientem  $\frac{1}{\beta}$ , kde  $\beta$  je součinitel výtokové rychlosti.

Výsledný vzorec pak zní:

$$t_0 = \frac{1}{\beta} \frac{\sqrt{2(S_1^2 - \alpha^2 S_2^2)}}{\alpha S_2 g} \left( \sqrt{gh + \frac{p' - p}{\rho}} - \sqrt{\frac{p' - p}{\rho}} \right) . \quad (16)$$

## astronomie

### Hvězdné asociace

RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ - RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

Koncem roku 1972 uplyne čtvrt století od slavnostního zasedání Akademie věd SSSR, věnovaného 30. výročí VŘSR, na němž akademik Viktor A. Ambarcumjan, prezident Arménské akademie věd (od r. 1967 čestný doktor University Karlovy v Praze) oznámil, že na observatoři v Bjurakanu objevil se svými spolupracovníky nové soustavy hvězd, které nazval *hvězdné asociace*. Jde o poměrně málo kompaktní a poměrně rychle se rozpadající skupiny hvězd, které svědčí o tom, že vznik hvězd není v Galaxii ukončeným procesem, ale že probíhá i v současné době.

Hvězdné asociace, jak potvrdili i jiní badatelé (např. A. Blaauw v Holandsku a W. Morgan v USA), jsou útvary relativně velmi mladé, neboť ze změřené rychlosti rozpínání asociací lze odhadnout jejich stáří asi na milion roků. Toto rozšiřování hvězdných asociací je důsledkem malé gravitační soudržnosti, která je způsobena malou hvězdnou hustotou (počtem hvězd na jednotku prostoru), takže hvězdné asociace netvoří na obloze výrazná seskupení hvězd, jako např. otevřené nebo kulové hvězdokupy. Podle spektrální příslušnosti hvězd, tvořících hvězdné asociace, můžeme je rozdělit na dvě skupiny: *asociace typu O* (složené z hvězd raných spektrálních tříd O a B) a *asociace typu T* (tvořené trpasličími červenými hvězdami, jejichž typickou představitelkou je proměnná hvězda T Tauri — odtud označení písmenem T).

Podle Ambarcumjanovy definice z r. 1951 mají hvězdné asociace typu O tyto charakteristiky:

1. Průměry asociací jsou v intervalu od 30 pc do 200 pc.
2. Jádrem hvězdných asociací jsou často otevřené hvězdokupy typu O.
3. Kromě hvězd spektrálních tříd O a B2 jsou v asociacích i hvězdy tříd B3 až B9, dále hvězdy Wolfovy-Rayetovy a P Cygni.
4. Jádrem asociací bývají i vícenásobné nestabilní hvězdy typu Lichoběžníka v Oriónu; žhavé obří hvězdy nejsou jen v jádru asociace, ale po celém jejím objemu.
5. Existují závažné důvody k předpokladu, že asociace jsou nestabilní útvary.

Od této již klasické Ambarcumjanovy definice uplynulo více než 20 roků a můžeme říci, že ani jeden bod nebyl vyvrácen, naopak všechny byly dalšími výzkumy potvrzeny.

Jako příklad dobře prozkoumané asociace můžeme uvést asociaci žhavých hvězd v souhvězdí Orióna, v okolí mlhoviny M 42. Vzdálenost asociace se odhaduje na 500 parseků, průměr asociace na 160 pc. Asociace v Oriónu je poměrně plochý útvar o tloušťce asi 80 pc, rozložený v blízkosti galaktické roviny. Počet hvězd, příslušejících k asociaci, se odhaduje na 1000. Nejbližší asociací je asociace Perseus II, která se rozprostírá kolem hvězdy  $\zeta$  Persei. Je ve vzdálenosti 380 pc a obsahuje asi 100 hvězd. Nejbližší známé asociace jsou v souhvězdí Kasiopeje. Asociace Cas I obsahuje jen 28 hvězd (jádry této asociace jsou hvězdokupy NGC 381 a 366), asociace Cas II + V obsahuje 160 hvězd (jádro NGC 7510) — obě jsou ve vzdálenosti 2700 parseků. Vzdálenější asociace nebyly pozorovány, neboť záření hvězd je pohlcováno v mračnách mezihvězdné látky.

Teoreticky předpovězené rozšiřování asociací bylo pozorováním potvrzeno. Podle Blaauwa činí rozšiřováním asociace Perseus II  $0,0027''/\text{rok}$ , což odpovídá rychlosti rozšiřování  $10 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ . Za předpokladu, že je tato rychlost stálá, můžeme odhadnout stáří této aso-